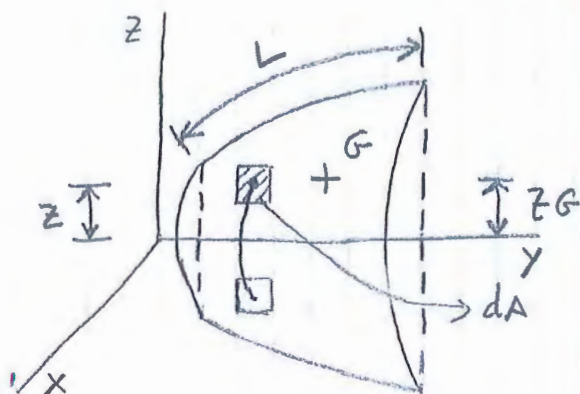




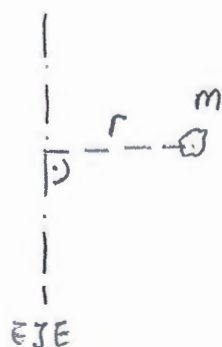
$$dV = \text{volumen al girar } dA$$

$$dV = 2\pi z dA, V = \int 2\pi z dA = 2\pi \int z dA$$

$$\text{con } zG = \frac{1}{A} \int z dA$$

$$V = 2\pi A zG$$

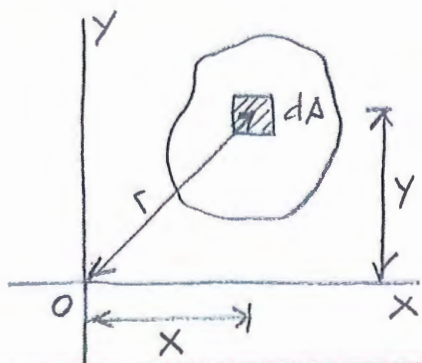
MOMENTOS DE INERCIA



$I = m r^2$: momento de inercia de m respecto al eje
sólido continuo

$$I = \int_V r^2 dm.$$

AREAS PLANAS



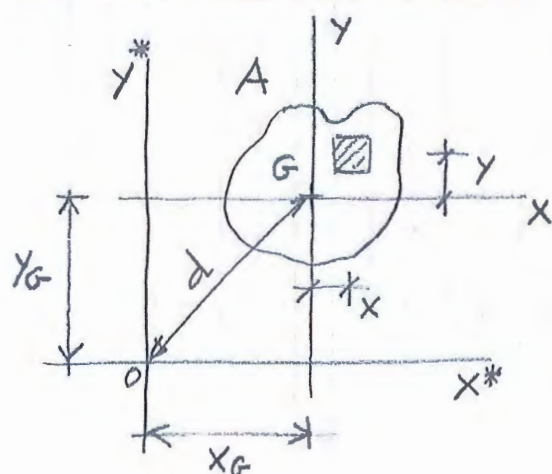
$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

I_x, I_y , momentos de inercia respecto los ejes x, y respectivamente

$$I_o = \text{momento polar de inercia} = \int_A r^2 dA.$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$I_o = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x$$

TEOREMA DE STEINER

G: Centro de gravedad

X, Y: Ejes que pasan por G

X*, Y*: Ejes cualquiera

A: Area de la sección

$$I_{X^*} = \int_A (Y_G + y)^2 dA = \int_A Y_G^2 dA + \int_A 2Y_G y dA + \int_A y^2 dA$$

Y_G = Valor constante para toda la sección

$$\int_A Y_G^2 dA = Y_G^2 \underbrace{\int_A dA}_A = Y_G^2 A$$

$$\int_A y^2 dA = I_x \text{ (momento de inercia)}$$

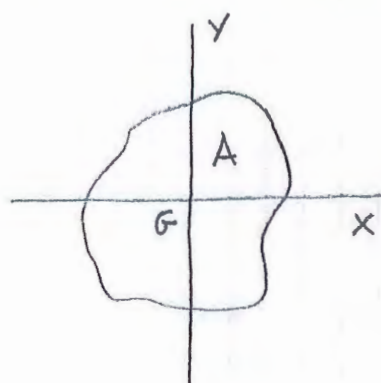
$$\int_A 2Y_G y dA = 2Y_G \int_A y dA ; \int_A y dA = 0, \text{ el eje } x \text{ pasa por el centro de gravedad}$$

Luego $I_{X^*} = I_x + Y_G^2 A$

Análogamente $I_{Y^*} = I_y + X_G^2 A$

También $I_0 = I_{X^*} + I_{Y^*} = I_x + Y_G^2 A + I_y + X_G^2 A =$
 $= \underbrace{I_x + I_y}_{I_G} + \underbrace{(X_G^2 + Y_G^2)}_{d^2} A = I_G + d^2 A$

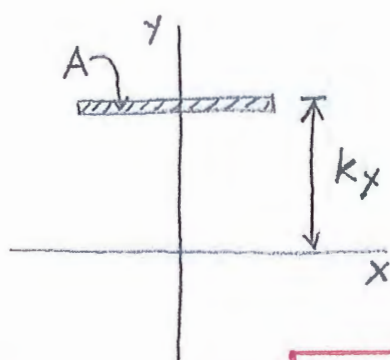
RADIO DE GIRO DE UN AREA



x, y : Ejes por el centro de gravedad (G)

$\left. \begin{matrix} I_x \\ I_y \end{matrix} \right\}$ Momentos de inercia

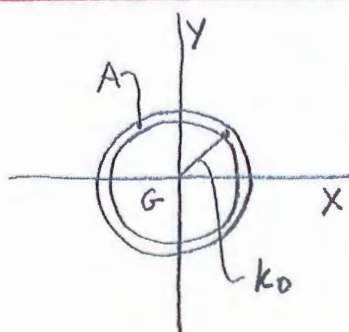
Concentrarnos todo el área (A) en una banda delgada, que tenga la misma inercia respecto x



$$I_x = k_x^2 A \quad k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \text{radio de giro de la sección A res-}$$

pecto del eje x (también se denomina i_x)

Análogamente $k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (i_y)$



También $k_G = \sqrt{\frac{I_G}{A}} \quad (i_G)$

$$k_G^2 = k_x^2 + k_y^2$$

MOMENTOS DE INERCIA DE AREAS COMPUESTAS

Sea un área A, compuesta de varias áreas $A_1, A_2, A_3, \dots$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \sum_i \int_{A_i} y^2 dA_i \quad (\text{una integral es una suma-}$$

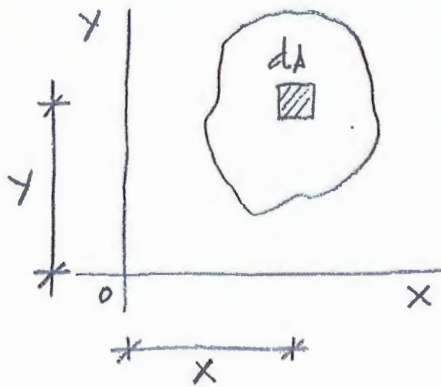
toria).

Se trata de una suma algebraica (los aligeramientos con signo negativo)

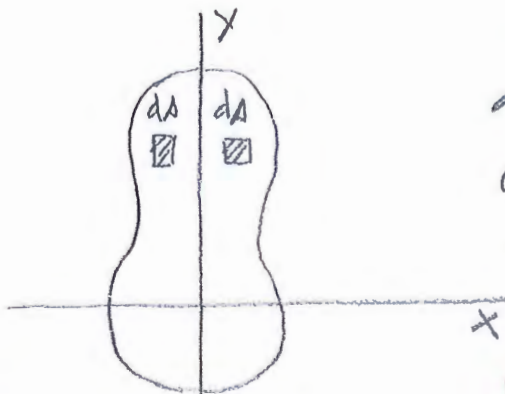
$$I_x = \sum_i I_{xi}$$

I_{xi} = Momento de inercia del área A_i respecto del eje x . Si las áreas A_i son figuras conocidas se aplica Steiner para obtener I_{xi}

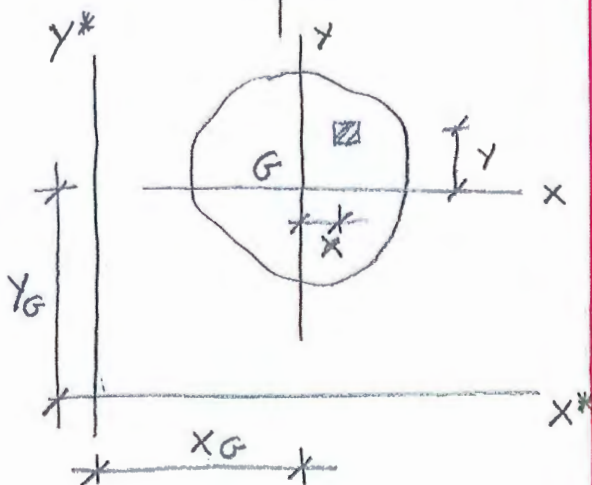
PRODUCTOS DE INERCIA



$$I_{xy} = \int_A xy \, dA$$



El producto de inercia I_{xy} de un área respecto a dos ejes ortogonales cualesquiera, será nulo ($I_{xy} = 0$) cuando uno de los ejes sea de simetría.

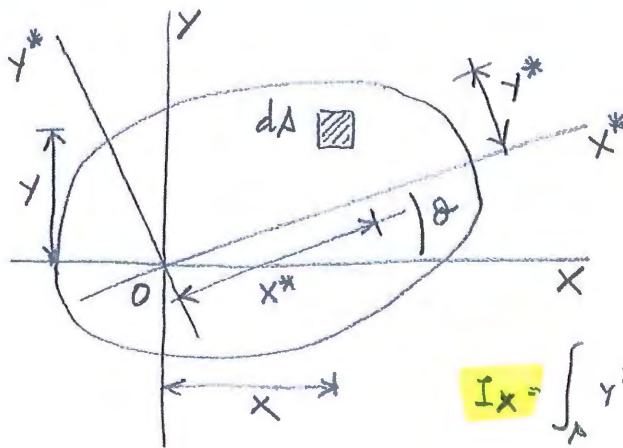


Teorema de Steiner

$$\begin{aligned} I_{xy*} &= \int_A xy \, dA = \int_A (x_G + x)(y_G + y) \, dA \\ &= x_G y_G \int_A dA + \cancel{x_G \int_A y \, dA} + \cancel{y_G \int_A x \, dA} + \int_A xy \, dA \end{aligned}$$

$$I_{xy*} = I_{xyG} + x_G y_G A$$

MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA



$$X^* = X \cos \theta + Y \sin \theta$$

$$Y^* = Y \cos \theta - X \sin \theta$$

I_x, I_y, I_{xy} son conocidos

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA, \quad I_{xy} = \int_A xy dA$$

$$I_{x^*} = \int_A (y^*)^2 dA = \int_A (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA = \cos^2 \theta \int y^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy dA + \sin^2 \theta \int x^2 dA \Rightarrow$$

$$I_{x^*} = I_x \cos^2 \theta - 2 I_{xy} \sin \theta \cos \theta + I_y \sin^2 \theta$$

Análogamente

$$I_{y^*} = I_x \sin^2 \theta + 2 I_{xy} \sin \theta \cos \theta + I_y \cos^2 \theta$$

$$I_{x^* y^*} = (I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta + I_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

Como

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

Resulta

$$\left. \begin{aligned} I_{x^*} &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \\ I_{y^*} &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \\ I_{x^* y^*} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (***) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuaciones} \\ \text{paramé-} \\ \text{tricas} \\ \text{de un} \\ \text{círculo.} \end{array}$$

Se deduce $I_{x^*} + I_{y^*} = I_x + I_y$ (momento polar de inercia)

eliminando θ de las ecuaciones paramétricas resulta

$$\left(I_{x^*} - \frac{I_x + I_y}{2} \right)^2 + I_{xy^*}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2$$

si $I_m = \frac{I_x + I_y}{2}$ y $R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2}$

tenemos

$$(I_{x^*} - I_m)^2 + I_{xy^*}^2 = R^2$$

Ecuación de un círculo en ejes I_{x^*} e I_{xy^*}

De la ecuación (***) haciendo $I_{xy^*} = 0$, se obtiene

$$\tan 2\theta = - \frac{2 I_{xy}}{I_x - I_y}$$

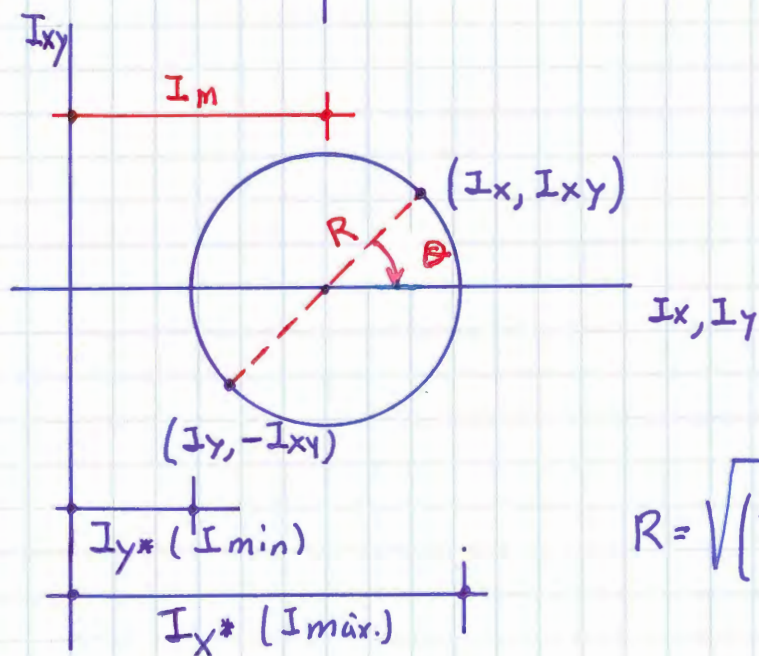
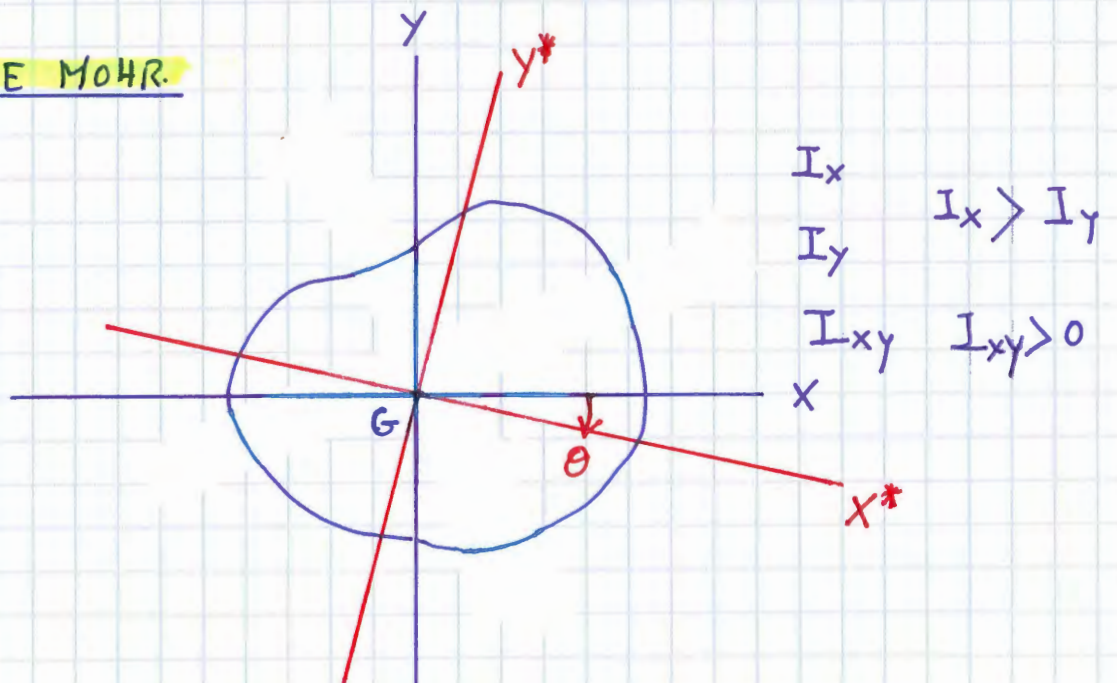
El valor de θ obtenido define un par de ejes perpendiculares entre sí para los cuales resulta.

$$\left. \begin{array}{ll} I_{x^*} \longrightarrow I_{\text{máximo}} \\ I_{y^*} \longrightarrow I_{\text{mínimo}} \\ I_{xy^*} \longrightarrow = 0 \end{array} \right\} \text{Ejes principales de inercia de la sección respecto de "O"}$$

$$I_{\text{máx}} = I_m + R, \quad I_{\text{mín}} = I_m - R$$

$$\left. \begin{array}{l} I_{\text{máx}} \\ I_{\text{mín}} \end{array} \right\} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2}$$

CIRCULO DE MOHR.



$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\begin{aligned} I_{x^*} &= I_{max.} \\ I_{y^*} &= I_{min.} \end{aligned} \left\{ = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \right.$$

$I_m \pm R.$